# Лекция

**Уравнение Абеля.**

**Задача Абеля.**

Пусть дана гладкая кривая в вертикальной плоскости ;

ось направлена вертикально вверх, ось горизонтална.

Материальная точка массы находится в положении

на кривой в состоянии покоя – её скорость в точке равна нулю. Под действием силы тяжести материальная точка начинает двигаться вдоль кривой и движется без трения до наинизшего положения

; точка кривой лежит на . Предполагаем, что составляющая силы тяжести, касательная к , всюду отлична от нуля, кроме, быть может, наинизшей точки . Это значит, что кривая задана уравнением , причем производная всюду конечна, кроме, быть может, точки . Тогда дифференциал длины дуги кривой имеет вид

 .

 В момент времени в положении между и материальная точка имеет скорость

 , касательную к кривой .

 .

 При переходе материальной точки из положения в положение приращение её кинетической энергии равно изменению её потенциальной энергии:

 ,

где – ускорение силы тяжести. Отсюда

 ,

 . (1)

 Знак минус в последнем равенстве выбран потому, что при увеличении времени высота у материальной точки убывает. Время падения точки из положения в положение соответствует изменению переменной от до 0. Время определяется кривой и зависит от исходной высоты материальной точки: . Поэтому функции и связаны равенством

 . (2)

Зная кривую и исходную высоту , находим по формуле (2) время .

 Абель поставил обратную задачу: найти кривую , для которой время падения с высоты без начальной скорости до заданной точки (без трения) представляет собой заданную функцию

 . Эта задача сводится к нахождению неизвестной функции из уравнения (2) и к решению дифференциального уравнения (1) относительно с условием .

 Уравнение (2) называется уравнением Абеля. Это линейное интегральное уравнение первого рода типа Вольтерра. Его ядро имеет слабую особенность.

**Задача о таутохроне.**

Пусть в уравнение (2) при . Тогда уравнения (1) и (2) определяют таутохронную кривую : время, за которое материальная точка скатывается до положения , не зависит от её исходного положения на кривой.

 Будем искать непрерывное решение уравнения

, , . (3)

 Разделим уравнение (3) на (полагаем ) и проинтегрируем по от 0 до :

 . (4)

 Так как , то

 .

 Сделаем замену переменной , тогда получим

 .

 Здесь – бета-функция и учитывая, что , тогда уравнение (4) примет вид

.

 Дифференцируя это уравнение по , получим

 , .

 Таутохрон задается уравнением , .

 Найдем параметрическое уравнение этой кривой

 , .

 Обозначим , .

Сделаем замену переменных , тогда

 .

 Следовательно, , , так как при , , то

 . Откуда получаем параметрическое задание нашей кривой

 Это уравнение обращенной выпуклостью вниз циклоиды.

**Решение уравнения Абеля.**

Рассмотрим решение уравнения Абеля более общего вида, чем уравнение (2)

 , , , . (5)

 Нижний предел интегрирования выбран равным нулю лишь для упрощения формул. Специальный вид ядра интегрального уравнения позволяет найти решение в явном виде.

 Предположим, что функция непрерывно дифференцируема. Будем искать непрерывное решение

. Разделим уравнение (5) на (полагаем ) и проинтегрируем по от 0 до :

 . (6)

 Сделаем замену переменной . Тогда

 - не зависит от .

 Поэтому уравнение (6) имеет вид

 . (7)

 Чтобы найти функцию , надо продифференцировать равенство (7) по

 *.*  (8) Надо ещё проверить, что полученная таким образом функция существует и непрерывна, так как интеграл (8) несобственный. Интеграл в формуле (8) нельзя дифференцировать по формуле Лейбница, так как это привело бы к расходящемуся интегралу.

 Можно получить другой вид формулы обращения уравнения (5).

 **Утверждение.** Пусть функция непрерывно дифференцируема. Тогда уравнение (5) имеет единственное непрерывное при решение , и его можно представить формулой

 . (9)

 Доказательство. Для упрощения выкладок проведем сначала доказательство формулы (9) при условии . Подставим выражение в интеграл и введём следующую функцию :

 . (10)

 Разделим обе части равенства (10) на (полагаем ) и проинтегрируем по от 0 до :

 ,

 где .

Изменим порядок интегрирования в повторном интеграле

 .

 Так как , то при всех . Разделим последнее равенство на (полагаем ) и проинтегрируем по от 0 до u:

 .

 При любом имеем , т.е. при условии формула (9) верна.

 Для доказательства формулы (9) при подставим выражение по формуле (9) в интеграл

 и введём функцию

 , (11)

 где определена по формуле (10). Разделим обе части равенства (11) на и проинтегрируем по от 0 до . Тогда получим при всех . Отсюда следует, что , т.е. формула (9) даёт решение уравнения (5).

 **Уравнения типа Абеля.**

Наряду с уравнениями типа (5) важное прикладное значение имеют уравнения, которые называют уравнениями типа Абеля. Они появляются в задачах, связанных с измерениями и наблюдениями (в задаче о распределении масс в галактиках; в диагностике плазмы в случае осевой симметрии шнура и др.) Приведём два примера уравнений типа Абеля относительно искомой функции с известной функцией .

 , (12)

 , (13)

 В некоторых случаях можно считать, что при . Тогда уравнение (13) имеет вид

 , (14)

 Построим формулу обращения уравнения (12) для нахождения его непрерывного решения . Умножим обе части уравнения (12) на (полагаем ) и проинтегрируем по от 0 до :

 . (15)

 Сделаем замену переменной . Тогда и

 .

 Поэтому уравнение (15) имеет вид

 . (16)

 Чтобы найти функцию , надо продифференцировать равенство (16) по . Если предположить, что существует непрерывная функция , которая удовлетворяет уравнению (12), то левую часть этого равенства можно дифференцировать

 . (17)

 Интеграл в формуле (17) нельзя дифференцировать по формуле Лейбница, поскольку это привело бы к расходящемуся интегралу.

 Можно получить другой вид формулы обращения уравнения (12).

 **Утверждение.** Пусть функция непрерывно дифференцируема. Тогда уравнение (12) имеет единственное непрерывное при решение , и его можно представить формулой

 . (18)

 Доказательство. Подставим выражение по формуле (18) в интеграл и введём следующую функцию

 . (19)

 (здесь учтено, что ).

 Разделим обе части равенства (19) на (полагаем ) и проинтегрируем по от 0 до :

 , где

 .

 Изменим порядок интегрирования в повторном интеграле:

 , где .

 В интеграле выполним замену переменной интегрирования . Тогда , отсюда следует . Поэтому

 .

 Следовательно, при всех . Умножим последнее равенство на (полагаем ) и проинтегрируем по от 0 до u:

 При любом значении , т.е. формула (18) даёт решение задачи (12).

 Построим формулу обращения уравнения (14) для нахождения его непрерывного решения . Умножим обе части уравнения (14) на (полагаем ) и проинтегрируем по от до :

 . (20)

 Сделаем замену переменной . Тогда ,

 , и

 .

 Поэтому уравнение (20) имеет вид

 . (21)

 Чтобы найти функцию , надо продифференцировать равенство (21)

 . (22)

 **Обобщенное уравнение Абеля.**

Обобщенным уравнением Абеля называется интегральное уравнение Вольтерра первого рода со слабой особенностью вида

 , , , , (23)

 - известная, - искомая функции.

 Докажем, что уравнение (23) имеет единственное решение, которое можно выразить через интеграл от функции .

 Умножим обе части уравнения на выражение и проинтегрируем полученное равенство от до . Тогда получим

 .

 Поменяем порядок интегрирования в левой части равенства

 . (24)

Вычислим

 .

 Напомним, что несобственный интеграл специального вида .

 Тогда из равенства (24) получим

 .

 Откуда получаем единственное решение обобщенного уравнения Абеля

 .