# Лекция

**Уравнение Абеля.**

**Задача Абеля.**

Пусть дана гладкая кривая в вертикальной плоскости ;

ось направлена вертикально вверх, ось горизонтална.

Материальная точка массы находится в положении

на кривой в состоянии покоя – её скорость в точке равна нулю. Под действием силы тяжести материальная точка начинает двигаться вдоль кривой и движется без трения до наинизшего положения

; точка кривой лежит на . Предполагаем, что составляющая силы тяжести, касательная к , всюду отлична от нуля, кроме, быть может, наинизшей точки . Это значит, что кривая задана уравнением , причем производная всюду конечна, кроме, быть может, точки . Тогда дифференциал длины дуги кривой имеет вид

.

В момент времени в положении между и материальная точка имеет скорость

, касательную к кривой .

.

При переходе материальной точки из положения в положение приращение её кинетической энергии равно изменению её потенциальной энергии:

,

где – ускорение силы тяжести. Отсюда

,

. (1)

Знак минус в последнем равенстве выбран потому, что при увеличении времени высота у материальной точки убывает. Время падения точки из положения в положение соответствует изменению переменной от до 0. Время определяется кривой и зависит от исходной высоты материальной точки: . Поэтому функции и связаны равенством

. (2)

Зная кривую и исходную высоту , находим по формуле (2) время .

Абель поставил обратную задачу: найти кривую , для которой время падения с высоты без начальной скорости до заданной точки (без трения) представляет собой заданную функцию

. Эта задача сводится к нахождению неизвестной функции из уравнения (2) и к решению дифференциального уравнения (1) относительно с условием .

Уравнение (2) называется уравнением Абеля. Это линейное интегральное уравнение первого рода типа Вольтерра. Его ядро имеет слабую особенность.

**Задача о таутохроне.**

Пусть в уравнение (2) при . Тогда уравнения (1) и (2) определяют таутохронную кривую : время, за которое материальная точка скатывается до положения , не зависит от её исходного положения на кривой.

Будем искать непрерывное решение уравнения

, , . (3)

Разделим уравнение (3) на (полагаем ) и проинтегрируем по от 0 до :

. (4)

Так как , то

.

Сделаем замену переменной , тогда получим

.

Здесь – бета-функция и учитывая, что , тогда уравнение (4) примет вид

.

Дифференцируя это уравнение по , получим

, .

Таутохрон задается уравнением , .

Найдем параметрическое уравнение этой кривой

, .

Обозначим , .

Сделаем замену переменных , тогда

.

Следовательно, , , так как при , , то

. Откуда получаем параметрическое задание нашей кривой

Это уравнение обращенной выпуклостью вниз циклоиды.

**Решение уравнения Абеля.**

Рассмотрим решение уравнения Абеля более общего вида, чем уравнение (2)

, , , . (5)

Нижний предел интегрирования выбран равным нулю лишь для упрощения формул. Специальный вид ядра интегрального уравнения позволяет найти решение в явном виде.

Предположим, что функция непрерывно дифференцируема. Будем искать непрерывное решение

. Разделим уравнение (5) на (полагаем ) и проинтегрируем по от 0 до :

. (6)

Сделаем замену переменной . Тогда

- не зависит от .

Поэтому уравнение (6) имеет вид

. (7)

Чтобы найти функцию , надо продифференцировать равенство (7) по

*.*  (8) Надо ещё проверить, что полученная таким образом функция существует и непрерывна, так как интеграл (8) несобственный. Интеграл в формуле (8) нельзя дифференцировать по формуле Лейбница, так как это привело бы к расходящемуся интегралу.

Можно получить другой вид формулы обращения уравнения (5).

**Утверждение.** Пусть функция непрерывно дифференцируема. Тогда уравнение (5) имеет единственное непрерывное при решение , и его можно представить формулой

. (9)

Доказательство. Для упрощения выкладок проведем сначала доказательство формулы (9) при условии . Подставим выражение в интеграл и введём следующую функцию :

. (10)

Разделим обе части равенства (10) на (полагаем ) и проинтегрируем по от 0 до :

,

где .

Изменим порядок интегрирования в повторном интеграле

.

Так как , то при всех . Разделим последнее равенство на (полагаем ) и проинтегрируем по от 0 до u:

.

При любом имеем , т.е. при условии формула (9) верна.

Для доказательства формулы (9) при подставим выражение по формуле (9) в интеграл

и введём функцию

, (11)

где определена по формуле (10). Разделим обе части равенства (11) на и проинтегрируем по от 0 до . Тогда получим при всех . Отсюда следует, что , т.е. формула (9) даёт решение уравнения (5).

**Уравнения типа Абеля.**

Наряду с уравнениями типа (5) важное прикладное значение имеют уравнения, которые называют уравнениями типа Абеля. Они появляются в задачах, связанных с измерениями и наблюдениями (в задаче о распределении масс в галактиках; в диагностике плазмы в случае осевой симметрии шнура и др.) Приведём два примера уравнений типа Абеля относительно искомой функции с известной функцией .

, (12)

, (13)

В некоторых случаях можно считать, что при . Тогда уравнение (13) имеет вид

, (14)

Построим формулу обращения уравнения (12) для нахождения его непрерывного решения . Умножим обе части уравнения (12) на (полагаем ) и проинтегрируем по от 0 до :

. (15)

Сделаем замену переменной . Тогда и

.

Поэтому уравнение (15) имеет вид

. (16)

Чтобы найти функцию , надо продифференцировать равенство (16) по . Если предположить, что существует непрерывная функция , которая удовлетворяет уравнению (12), то левую часть этого равенства можно дифференцировать

. (17)

Интеграл в формуле (17) нельзя дифференцировать по формуле Лейбница, поскольку это привело бы к расходящемуся интегралу.

Можно получить другой вид формулы обращения уравнения (12).

**Утверждение.** Пусть функция непрерывно дифференцируема. Тогда уравнение (12) имеет единственное непрерывное при решение , и его можно представить формулой

. (18)

Доказательство. Подставим выражение по формуле (18) в интеграл и введём следующую функцию

. (19)

(здесь учтено, что ).

Разделим обе части равенства (19) на (полагаем ) и проинтегрируем по от 0 до :

, где

.

Изменим порядок интегрирования в повторном интеграле:

, где .

В интеграле выполним замену переменной интегрирования . Тогда , отсюда следует . Поэтому

.

Следовательно, при всех . Умножим последнее равенство на (полагаем ) и проинтегрируем по от 0 до u:

При любом значении , т.е. формула (18) даёт решение задачи (12).

Построим формулу обращения уравнения (14) для нахождения его непрерывного решения . Умножим обе части уравнения (14) на (полагаем ) и проинтегрируем по от до :

. (20)

Сделаем замену переменной . Тогда ,

, и

.

Поэтому уравнение (20) имеет вид

. (21)

Чтобы найти функцию , надо продифференцировать равенство (21)

. (22)

**Обобщенное уравнение Абеля.**

Обобщенным уравнением Абеля называется интегральное уравнение Вольтерра первого рода со слабой особенностью вида

, , , , (23)

- известная, - искомая функции.

Докажем, что уравнение (23) имеет единственное решение, которое можно выразить через интеграл от функции .

Умножим обе части уравнения на выражение и проинтегрируем полученное равенство от до . Тогда получим

.

Поменяем порядок интегрирования в левой части равенства

. (24)

Вычислим

.

Напомним, что несобственный интеграл специального вида .

Тогда из равенства (24) получим

.

Откуда получаем единственное решение обобщенного уравнения Абеля

.